

CultureMath → Tous les contenus → Lycée → Les équations canoniques d'Al-Khawārizmi

ARTICLE

Les équations canoniques d'Al-Khawārizmi

Entre algorithmes et poésie

Publié le 31.12.17 | Par Kacem Nouini

CultureMath

De nos jours, quand on parle de l'algèbre, du système décimal indien ou des algorithmes, on ne peut pas ne pas penser au rôle joué par le grand mathématicien Al-Khawārizmi. La lettre « ā » est pour désigner un « a prolongé ».

Que sait-on exactement du mathématicien Al-Khawārizmi ¹ ? Qu'a-t-il légué à l'humanité ? Quels sont ses domaines de recherche ? La

naissance de l'algèbre était-elle le fruit d'un hasard ou d'une demande de l'époque afin d'apporter des réponses aux problèmes rencontrés ?

Nous ne prétendons pas apporter de réponses à toutes ces questions déjà étudiées pendant plusieurs années par de nombreux spécialistes des mathématiques médiévales arabes comme Roshdi Rashed ou Ahmed Djebbar, qui ont écrit de remarquables publications et ouvrages.

Nous nous intéresserons, dans un premier temps, à l'étymologie du mot **algèbre** et à l'explication des mots clés « **al jabr** » et « **al moqābala** ».

Dans un deuxième paragraphe, nous étudierons les algorithmes de résolution des six équations canoniques Al-Khawārizmi à travers un poème didactique écrit au douzième siècle par un mathématicien marocain Ibn Al-Yāsamin.

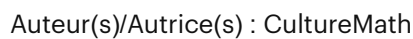
Ce poème se compose de 57 vers, mais nous ne garderons que ceux dont nous aurons besoin pour ces fameuses équations canoniques. Il ne s'agit pas de le traduire ² mais d'apporter une traduction en symbolisme mathématique de certains passages.

Abou Abdallah Mohammad Ibn Moussa Al-Khawārizmi ³ né vers 780 apr. J.-C (environ 164 après l'Hégire) dans la ville de Khwarezm (ou Khorezm, capitale de l'ancienne Choresmie d'Hérodote), nommée actuellement Khi-va, se trouvant en Ouzbékistan entre la mer Caspienne et la mer d'Aral. Il meurt à Bagdad (en Irak) vers 850 apr. J.-C (environ 236 après l'Hégire).

Comme la langue arabe (langue sémitique) n'accepte pas la présence de deux lettres non vocalisées (لُخْ) (présence de deux ° qui se suivent) , son nom est alors écrit et prononcé Al-Khawārizmi الْخَوَارِزْمِي que certaines populations arabes prononcent El-Khawārizmi bien que le son « é » n'existe pas en arabe : on appelle cela inclinaison (« Imāla » امالة). Cet article « Al » n'est autre que l'article défini comme dans « le Clermontois » pour parler de quelqu'un de Clermont-Ferrand.

Il fut un érudit de la prestigieuse Maison de la sagesse « Bayt Al hikma » (بيت الحكمة) avec le soutien du calife abbaside Al-Māmoun, régnant à Bagdad de 813 à 833 apr. J.-C.

Hormis ses ouvrages astronomiques (ou apparaissent les premières tables de sinus et de tangentes), le principal ouvrage mathématique de référence est intitulé : « Al Kitāb al mokhtasar fi hisāb al jabr wa-l-moqābala » (الكتاب المختصر في حساب الجبر و المقابلة)



Dans la première page de son livre, Al-Khawārizmi a rappelé la définition du système décimal utilisé en Inde :

ولما نظرت فيما يحتاج اليه
الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عدداً ووجدت جميع الأعداد إنما تركبت
من الواحد والواحد داخل في جميع الأعداد . ووجدت جميع ما يلفظ به من
الأعداد ما جاوز الواحد إلى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم ثني العشرة وتثلث
كما فعل بالواحد فتكون منها العشرون والثلاثون إلى تمام المائة، ثم ثني المائة
وتثلث كما فعل بالواحد وبالعشرة إلى الألف ثم كذلك تردد الألف عند كل
عقد إلى غاية المدرك من العدد .

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

D'autre part, le titre de cet ouvrage contient deux mots très importants qui nous intéressent dans la suite de ce travail :

a. **al jabr**

et

b. **al moqabala**

Sans oublier le mot **algorithme** qui découle d'Algoritmi ou **guarismo** (en espagnol) ou **algarismo** (en portugais)...

a. Le mot **al jabr** (الجبر) est à l'origine du mot **algèbre**. Il est associé à une opération de calcul.

Pour chercher l'étymologie de ce mot, il faut revenir à sa racine qui est le verbe « **jabara** » (جبر) désignant par exemple, réparer une fracture ou restaurer ⁴.

Certains pourraient penser que ce mot est Araméen (langue mère de l'Arabe, l'Hébreu, l'Amharique, langue nationale de l'Éthiopie, le Tigre, langue parlée en Érythrée), ce qui serait

peu probable car le verbe « réparer » ou « restaurer » en araméen est

qui se prononce « a sa », désignant aussi guérir, soigner ou remettre en état.

ܐܫܐ PE. only act. part. used as subst.; see **ܐܫܐ** and **ܐܫܐܐ**. PA. **ܐܫܐ** fut. **ܐܫܐܐ** 1 pers. fut. **ܐܫܐ**; imper. **ܐܫܐ** *to heal*; rarely metaph. *to restore*. ETHPE. **ܐܫܐܐܐ** or **ܐܫܐܐܐ** *to be healed, restored*. DERIVATIVES, **ܐܫܐܐܐܐ**, **ܐܫܐܐܐܐܐ**, **ܐܫܐܐܐܐܐܐ**, **ܐܫܐܐܐܐܐܐܐ**.

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

C'est à partir de ces mots que nous allons suivre la pensée mathématique d'Al-Khawārizmi.

Al-Khawārizmi a utilisé ce terme al jabr (الجبر) pour ajouter aux deux membres d'une équation le même terme afin de n'avoir que des termes à ajouter, plutôt que des soustractions, et pour ne manipuler que des quantités entières.

Par exemple :

$$\begin{aligned}
 4x^2 - 5x + 1 &= x^2 + \frac{1}{2}x \\
 4x^2 - 5x + 1 + 5x &= x^2 + \frac{1}{2}x + 5x \\
 4x^2 + 1 &= x^2 + \frac{11}{2}x \\
 8x^2 + 2 &= 2x^2 + 11x
 \end{aligned}$$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

b. Le mot **Al moqābala** (المقابلة) signifie la comparaison : il s'agit tout simplement de regrouper les quantités de même espèce.

Poursuivons l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 2 &= 2x^2 + 11x \\
 8x^2 + 2 - 2x^2 &= 2x^2 + 11x - 2x^2 \\
 6x^2 + 2 &= 11x
 \end{aligned}$$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Grâce à la restauration et à la comparaison, Al Khawārizmi a classifié les équations en six types « équations canoniques », que nous écrivons en langage moderne sous la forme :

Types d'équations :	Selon Al Khawārizmi	Langage moderne
simples	Carrés égaux aux racines.	$ax^2 = bx$
	Carrés égaux à un nombre.	$ax^2 = c$
	Racines égales à un nombre.	$bx = c$
composées	Carrés et racines égaux à un nombre.	$ax^2 + bx = c$
	Carrés et nombre égaux aux racines.	$ax^2 + c = bx$
	Carrés égaux aux racines et nombre.	$ax^2 = bx + c$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Le nombre x^2 est appelé « Al-māl » المال (c'est-à-dire « le bien » au sens de fortune).

Le nombre x est appelé « al-jidhr » الجذر (c'est-à-dire « la racine »)

La constante est appelée « 'adad » العدد (le « nombre »)

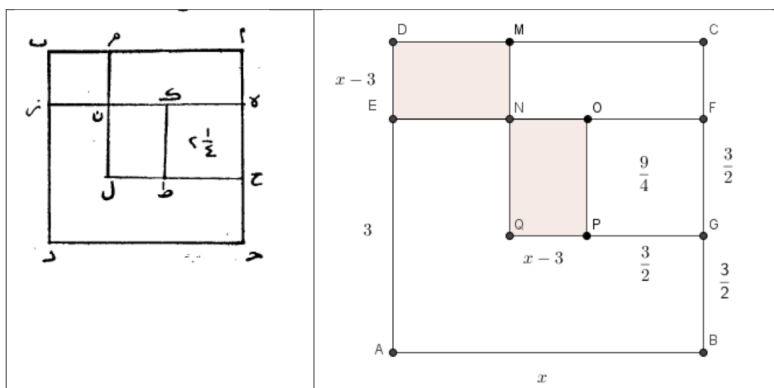
Voici un exemple d'équation du type $ax^2 = bx + c$.

Soit à résoudre l'équation :

وأما ثمثة أجزار وأربعة من العدد فعزل مالا
3 racines et 4 'adad sont égaux à 1 māl (carré).

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Qui se traduit par l'égalité : $3x + 4 = x^2$.



Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

On construit un carré ABCD de côté x (l'inconnue que nous cherchons) partagé en deux rectangles CDEF, d'aire 4, et ABFE de dimensions x et 3.

On prend G, milieu de [BF] et on construit le carré FGPO à l'intérieur du carré ABCD.

On construit un nouveau carré CGQM tel que $MN = ON$ (il s'ensuit que les rectangles DENM et OPQN sont de même aire).

$$\text{Aire}(CGQM) = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$

Ainsi le côté du carré CGQM, qui n'est autre que $(x - \frac{3}{2})$, est égal à $\frac{5}{2}$.

On en déduit que $x = 4$.

Résolution algébrique de ce problème :

Il s'agit de trouver x tel que $x^2 = 3x + 4$.

Cette équation est équivalente à :

$$x^2 - 3x - 4 = 0.$$

Or

$$x^2 - 3x - 4 = (x - \frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 - 4 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4}$$

.

Ainsi

$$x^2 = 3x + 4 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{25}{4} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

(seule la solution positive est retenue)

On en déduit que $x = 4$.

Notons que tout au long du chapitre 2 de son livre, il a donné des justifications géométriques de l'existence des solutions positives de chaque équation avant de montrer, dans son troisième chapitre, la signification des deux termes *aljabr* et *al-muqābala* qui permettent de ramener les équations quadratiques à l'une des formes d'équations canoniques précédentes.

Dans la suite, nous nous intéresserons aux algorithmes de résolution des équations canoniques d'Al-Khawārizmi, pas par les méthodes qu'il a exposées dans son livre mais par ce qu'un autre mathématicien peu connu a décrit dans un poème écrit en arabe. Il s'agit de Ibn Al-Yāsamin⁵.

Il est né à Fès (Maroc) au XII^e siècle et a vécu et a étudié à Séville capitale de la dynastie marocaine des Almohades, dans la tribu berbère des Banu Hajjaj (بنو حجاج). Il fut proche du Calife Abou Yousouf Yaqoub al-Mansour Al-mowahidi. Ibn Al-Yāsamin est mort assassiné à Marrakech en 1202.

Son poème, composé de 57 vers, est appelé URJUZH⁶ (أرجوزة) ou encore Al-Yāsaminiyya (الياسمينية). Dans la tradition arabe, on versifie toutes les sciences aussi bien scientifiques que littéraires ou religieuses.

Al-Yāsaminiyya, ce poème didactique, appelé aussi matn (متن), est appris par cœur par les élèves comme aide-mémoire. Il a été large-

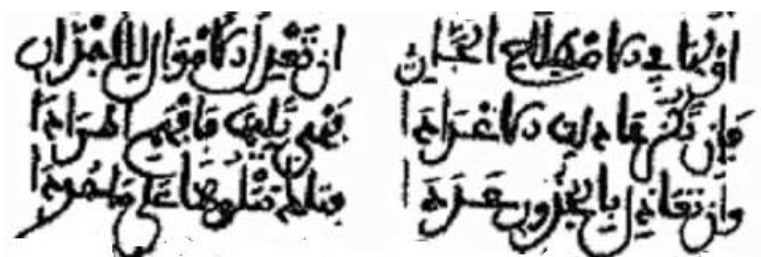
ment commenté au Maghreb par Ibn Qunfudh (1339-1407) et par Al-Qalasadi dans « Charh al-Urjuzah al-yāsaminiyya fi al-jabr wa-l-moqābala » sans oublier de citer un autre commentaire⁷ très riche d'exemples et peu exploité de 102 pages à la bibliothèque numérique de Rabat (Maroc), écrit par El-Mehdi Ben Abdessalam Rbati (1850-1922).

D'autres commentaires en Orient ont suivi dont les plus importants sont celui de Sibt-Al-Mārdini⁸ (1423-1506) ainsi que celui de Ibn al-Hāim⁹ (né au Caire en 1352, mort à Jérusalem en 1412).

Ce poème ne reflète pas tout le niveau atteint en algèbre à son époque, mais il nous semble intéressant d'observer les vers 11 à 39 pour la résolution des équations canoniques d'Al-Khawārizmi.

Ce dernier a classé les équations canoniques en deux types : simples et composées.

1) Les équations canoniques simples :

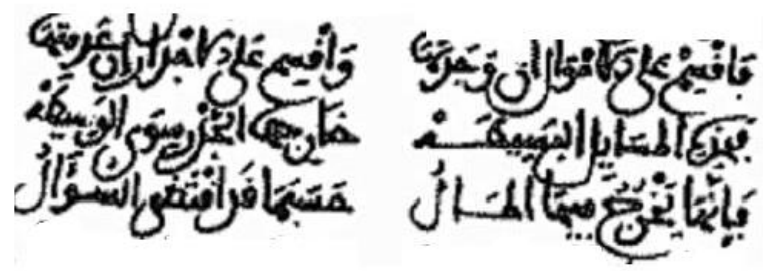


Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

En caractère d'imprimerie		Interprétation mathématique
أن تعدل الأموال للأجزاء	أولها في الاصطلاح الجاري	$(T_1) \quad ax^2 = bx$
فهي تليها فافهم المراد	وإن تكن عادلت الأعدادا	$(T_2) \quad ax^2 = c$
فتلك تتلوها على ما حددا	وإن تعادل بالجذور عددا	$(T_3) \quad bx = c$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

La résolution de ces trois équations est donnée par ces trois vers :



Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

En caractère d'imprimerie	Interprétation mathématique
واقسم على الأجزاء إن عدمتها خارجها الجذر سوى الوسطية حسبما قد إقتضى السؤال	$(T_1) \quad ax^2 = bx \Leftrightarrow \frac{a}{a}x^2 = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$ (al-jidhr) $(T_2) \quad ax^2 = c \Leftrightarrow \frac{a}{a}x^2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow x^2 = \frac{c}{a}$ (al-māl) $(T_3) \quad bx = c \Leftrightarrow \frac{b}{b}x = \frac{c}{b} \Leftrightarrow x = \frac{c}{b}$ (al-jidhr)

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Voici des exemples donnés par Sibt-Al-Mārdī-ni dans son commentaire :

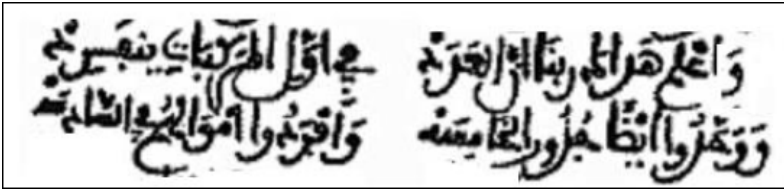


Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Traduction	Interprétation mathématique
Deux biens (carrés) sont égaux à dix racines. Combien vaut une racine ? Combien vaut un bien ? Divise les dix racines par deux, tu obtiens cinq, c’est la racine et la bien est vingt-cinq.	C’est l’équation $2x^2 = 10x$ Du type (T_1) avec $a > 1$.
Un demi bien vaut trois racines. Divise les trois racines par un demi. La racine est alors six. Le bien est trente-six.	C’est l’équation $\frac{1}{2}x = 3$ Du type (T_1) avec $a < 1$.
Trois biens valent soixante-quinze dirhams. Divise les dirhams par trois, tu obtiens le bien qui est vingt-cinq.	C’est l’équation $3x^2 = 75$ Du type (T_2) avec $a > 1$.
Un demi bien vaut dix dirhams. Divise les dix dirhams par un demi, tu obtiens le bien qui est vingt.	C’est l’équation $\frac{1}{2}x^2 = 10$ Du type (T_2) avec $a < 1$.
Dix racines valent cinquante dinars. Divise cinquante par dix (le nombre de racines) , tu obtiens la racine qui est cinq.	C’est l’équation $10x = 50$ Du type (T_3) avec $b > 1$.
Le tiers d’une racine vaut deux dinars. Divise deux par le tiers (le nombre de racines) , tu obtiens la racine qui est six.	C’est l’équation $\frac{1}{3}x = 2$ Du type (T_3) avec $b < 1$. Remarque : ici il s’est trompé en écrivant « divise deux par trois, tu obtiens la racine qui est six »

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

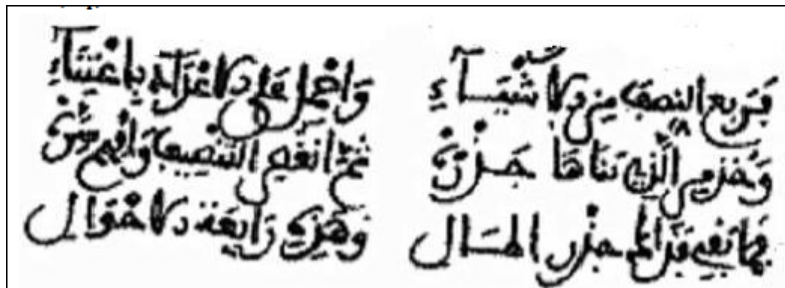
2) Les équations canoniques composées :



Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

En caractère d’imprimerie	Interprétation mathématique
واعلم هداك ربنا ان العدد في أول المركبات ينفرد	$(T_4) \quad x^2 + bx = c$
ووجدوا أيضاً جذور الخامسة وأفردوا أموالهم في السادسة	$(T_5) \quad x^2 + c = bx$
	$(T_6) \quad x^2 = bx + c$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

a) Résolution de $(T_4) : x^2 + bx = c$ 

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

En caractère d'imprimerie	Interprétation mathématique
فربع النصف من الأشياء و أحمل على الأعداد باعثناء	• Calcule $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
وأخذ من الذي تنهيه جذره ثم انقص التنصيف وافهم سره	• Ajoute c (tu obtiens $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$)
فما بقي جذر المال وهذه رابعة الأحوال	• Prends sa racine carrée : $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
	• Soustrais $\frac{b}{2}$
	• Alors $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

b) Résolution de $(T_5) : x^2 + c = bx$ 

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

En caractère d'imprimerie	Interprétation mathématique
وأسقط من التربع في الأخرى العدد وجذر ما بقي عليه يعتمد	• Calcule $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
فأسقطه من تصنيك الأجزاء وإن تشأ جمعه إختيارا	• Soustrais c (tu obtiens $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$)
فذاك جذر المال بالحمالان و ذاك جذر المال بالنقصان	• Prends sa racine carrée : $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$
وإن غدا التربع مثل العدد فجزره التصنيف دون فند	• $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} + \frac{b}{2}$ (avec ajout)
وإن يكن يربى عليه العدد أيقنت أن ذلك لا ينعضد	ou bien • $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ (avec retrait) • Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, alors $x = \frac{b}{2}$ • Si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, alors pas de solution.

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

c) Résolution de (T_6) : $x^2 = bx + c$



Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

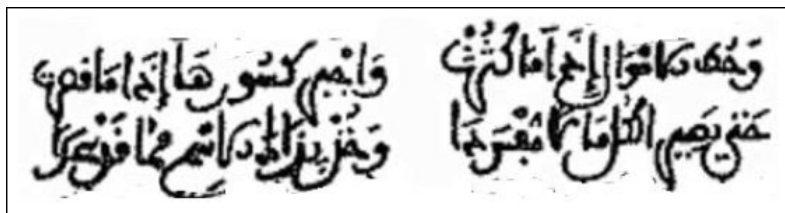
En caractère d'imprimerie	Interprétation mathématique
وإذ فرغنا من بيان الخامسة فلنوضح الآن بيان السادسة	• Calcule $\left(\frac{b}{2}\right)^2$
فلجمع إلى أعدادك التريعا واستخرجن جذرها جميعا	• ajoute c (tu obtiens $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$)
وأحمل على التصنيف ما أخذنا فذلك الجذر الذي اردنا	• Prends sa racine carrée : $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$
	• $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Jusqu'ici, nous pouvons dire qu'ibn Al- yāsa- min a donné tous les algorithmes de résolu-

tion des équations canoniques.

En fait, dans la suite de son poème, il rappelle une méthode d'Al-Khawārizmi appelée « Al hatt » (الحط) appliquée à une équation du type $ax^2 + bx = c$ qui est la suivante :

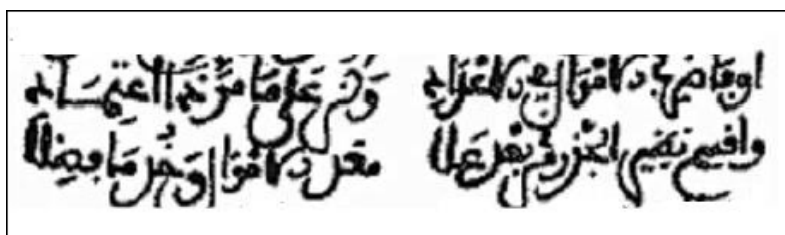


Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

En caractère d'imprimerie	Interprétation mathématique
وحط الأموال إذا ما كُثِرَتْ وأجب كسورها إذا ما قصرت	- Si $a > 1$, alors on divise tout par a, ce qui donne $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$ (hatt) - Idem si $a < 1$ (al jabr)
حتى يصير الكل مالا مفردا وخذ بذلك الاسم مما قد عدا	

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Dans la suite, ibn Al- yāsamin propose une autre méthode, déjà utilisée par Al kharaji¹⁰ (الكرخي) (mort vers 1030) dans « Extrait du Fa-khri » :



Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

وكن على ما مر ذا اعتماد	أو فاضرب الأموال في الأعداد	- Multiplie a par c, ce qui donne l'équation : $a^2x^2 + abx = ac$ - Résoudre $X^2 + bX = ac$, où $X = ax$ - La solution auxiliaire (« <i>nadhir al-jidhr</i> ») est X_0 Divise la solution auxiliaire par a: on obtient $x_0 = \frac{X_0}{a}$
عدد الأموال وخذ ما فضلا	واقسم نظير الجذر من بعد على	

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Exemple 1 : soit à résoudre l'équation

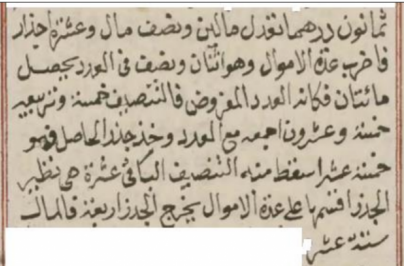
$$\frac{5}{4}x^2 + 5x = 75$$

En posant $X = \frac{5}{4}x$, cette équation est équivalente à $X^2 + 5X = \frac{375}{4}$ du type (T_4) dont la solution auxiliaire est

$$X_0 = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{375}{4}} - \frac{5}{2} = \frac{15}{2}$$

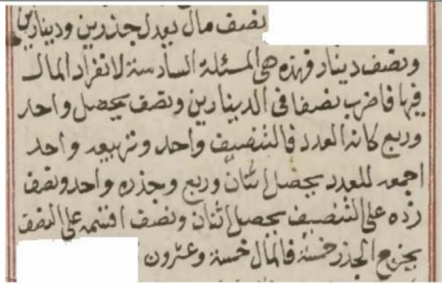
$$\text{Finalement : } x_0 = \frac{X_0}{\frac{5}{4}} = 6.$$

Exemple 2 (Sibt-Al-Mārdini) :

$80 = \left(2 + \frac{1}{2}\right)x^2 + 10x$ On multiplie les deux membres par le nombre de biens, c'est-à-dire par $\left(2 + \frac{1}{2}\right)$, cela donne : $200 = (2,5x)^2 + 10 \times (2,5x)$ de la forme : $200 = X^2 + 10X$ (du type T_4) où $X = 2,5x$ La solution est $X_0 = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 200} - \frac{10}{2} = 10$ (solution auxiliaire) Ainsi : $x_0 = \frac{10}{2,5} = 4$ (le <i>jidhr</i>) et $x_0^2 = 16$ (le <i>māl</i>)	
---	---

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Exemple 3 : (Sibt-Al-Mārdini)

$\frac{1}{2}x^2 = 2x + \left(2 + \frac{1}{2}\right)$ On multiplie les deux membres par le nombre de biens, c'est-à-dire par $\frac{1}{2}$, cela donne : $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = x + \frac{5}{4}$ de la forme : $X^2 = 2X + \frac{5}{4} \text{ (du type } T_6\text{)}$ où $X = \frac{x}{2}$ La solution est $X_0 = \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2}$ (solution auxiliaire) Ainsi : $x_0 = 2X_0 = 5$ (le jidhr) et $x_0^2 = 25$ (le māl)	
--	---

Auteur(s)/Autrice(s) : CultureMath

Conclusion : Tout au long de ce travail, le lecteur peut remarquer la différence du style, de la méthode et de l'évolution du concept de l'algorithme au fil des siècles. Certains algorithmes nous paraissent actuellement banals comme pour la résolution des équations du type (T_i) , avec $i = 1, 2, 3$ mais cela n'a pas été le cas à cette époque où il n'était pas aisé de concevoir la division par des nombres du type $(m + \frac{1}{n})$, m et n étant entiers, ou tout simplement par une fraction.

Il semblerait que la poésie didactique ait été utilisée uniquement dans la civilisation musulmane. Elle illustre un des apports de la civilisation arabo-musulmane et son autonomie par rapport à la science grecque ou aux savoirs persans et indiens.

 CRÉDITS

Auteur(s)/Autrice(s)

Kacem Nouini

Professeur et
membre de
l'IREM de Cler-
mont-Ferrand

Éditeur(s)/

Éditrice(s)

Quentin Sargeac

Étudiant en L2
de mathéma-
tiques et
membre du
groupe CM-
IREM de Bor-
deaux



PARTA
CET
ARTIO



NOTES



- 1 La lettre « ā » est pour désigner un « a prolongé ».
- 2 Pour une traduction anglaise complète, voir Mahdi Abdeljaouad (2005), 12th Century algebra in an Arabic poem : Ibn al-Yâsamîn's Urjûza fi'l-jabr wa'l-muqâbala, in LLULL, vol. 28 (n°61), pp. 181-194.
- 3 Kh est à prononcer comme la « jota » en espagnol (elle est donc gutturale)
- 4 Ce verbe est utilisé aussi dans le sens « aider un pauvre pour sortir de sa misère », d'après Lisan al-'Arab de ibn Manzour ,1233-1312 C, (le dictionnaire de référence).
- 5 Yâsamin veut dire jasmin en arabe : c'était le prénom de sa mère
- 6 URJUZH : diminutif du mot rajaz, un des 16 schémas métriques (ou modèle de vers) dans la poésie arabe.
- 7 <http://bnm.bnrm.ma:86/Arabe/pdf.aspx?IDc=838>
- 8 Muhammad ibn Muhammad Sibṭ al-Mardīnī al-Dīmāshqī
- 9 Abū al-'Abbās Shihāb al-Dīn Aḥmad ibn Muḥammad ibn 'Alī al-Maqdisī al-Shāfi'ī connu sous le nom de Ibn al-Hā'im.
- 10 Abū Bakr Muhammad ibn al-Hasan al-Karajī (né en Iran, il a vécu à Bagdad). Voir <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99504r.r=Ex-trait+du+Fakhr%C3%AE.langFR>